Mathématiques Exercices

(Options T et TA) Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
L'utilisation d'une calculatrice personnelle est autorisée.
Tout document est strictement interdit, y compris la notice d'utilisation de la calculatrice.

Il est rappelé que tous les résultats doivent être dûment justifiés.

EXERCICE N° 1

1°) k et p sont deux entiers positifs ou nuls ; le logarithme népérien est désigné par ln .

Soit l'intégrale $I_{k,p} = \int_0^1 x^k (\ln(x))^p dx$.

Montrer qu'elle est convergente . La calculer .

2°) En déduire un développement de l'intégrale $J = \int_0^1 x^x \, dx$ sous la forme

$J = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^n}$, les réels a_n étant à calculer .

3°) Soit la série entière $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

3-1: Calculer le rayon de convergence de S .

3-2: Donner de S(-1) une valeur approchée à 10^{-7} près , et dire s'il s'agit d'une valeur approchée par défaut ou par excès ; les détails des calculs devront nécessairement figurer sur la copie .

3-3: Donner de S(1) une valeur approchée à 10^{-6} près ; donner aussi les détails des calculs .

EXERCICE N° 2

a est un nombre réel , strictement positif , donné .

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$, orienté et rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$, la surface (S) d'équation

$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 - 8 a^2 (x^2 + y^2) = 0$,

où x , y , et z sont les coordonnées du point générique de (S) dans $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$.

1°) Donner la nature géométrique de (S) et en préciser les éléments caractéristiques.

Tournez la page S.V.P.

2°) Soit (C) l'intersection de (S) avec le plan d'équation x=0 , et (D) la tangente à (C) passant par O , et située dans les régions de ce plan où $yz \geqslant 0$. On note (P) le plan qui contient (D) et la droite d'équation $y = z = 0$. On définit un nouveau repère orthonormé direct $(O ; \vec{I} , \vec{J} , \vec{K})$, l'axe $(O ; \vec{I})$ coïncidant avec l'axe $(O ; \vec{i})$, et le plan d'équation $Z = 0$ coïncidant avec (P) (X , Y et Z sont les coordonnées d'un point de l'espace dans $(O ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$).

Former l'équation de (S) dans $(O ; \vec{I} , \vec{J} , \vec{K})$.
Donner , dans ce même repère , l'équation de l'intersection (V) de (S) avec (P) .
Vérifier que (V) est réunion de deux cercles (V_1) et (V_2) symétriques l'un de l'autre par rapport à $(O ; \vec{J})$, et représenter graphiquement (V) dans $(O ; \vec{I} , \vec{J})$.

3°) Soit M un point de (V) n'appartenant qu'à (V_1) ou qu'à (V_2) , et (P_M) le plan parallèle à $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ qui passe par M . Calculer l'angle des tangentes en M à (V) et à l'intersection de (S) avec (P_M) .

EXERCICE N° 3

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels , et n un entier strictement supérieur à un .

Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ sera identifié avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique . De façon générale , la transposée d'une matrice B sera notée ${}^tB$.
M et E sont deux matrices carrées symétriques réelles , définissant deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$: $(X , Y) \longmapsto {}^tX\, M\, Y$, et $(X , Y) \longmapsto {}^tX\, E\, Y$
Soit le système différentiel
(1) : $M\, U'' + E\, U = 0$
où l'inconnue est une application $t \longmapsto U(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

1°) On considère les solutions de (1) sous la forme $U(t) = A \sin (w\, t + \varphi)$, où le vecteur non nul A de $\mathbb{R}^n$, et les réels $w \geqslant 0$ et φ sont constants.
Montrer que , pour qu'il existe des solutions à (1) de cette forme , il faut et il suffit que :

(2) : déterminant $(E - w^2 M) = 0$,
et qu'alors , A est solution de
(3): $(E - w^2 M)\, A = 0$.

2°) On suppose désormais que le problème (2) admet n solutions w_i ($i = 1 , 2 , \ldots n$) vérifiant $0 < w_1 < w_2 < \ldots < w_n$, et on note A_i un vecteur non nul solution de (3) et associé à w_i .
Pour X vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$r(X) = \frac{{}^tX\, E\, X}{{}^tX\, M\, X} .$$

A SUIVRE

2-1: Pour $i \neq j$, utiliser (3) pour calculer ${}^tA_i\, M\, A_j$ et ${}^tA_i\, E\, A_j$.

En déduire que $\left\{A_i\right\}_{i=1,2,\ldots n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

2-2: Calculer r(X) lorsque X est exprimé sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$.

2-3: Rechercher , lorsque X parcourt $\mathbb{R}^n$ sans être nul , le minimum de r(X) , et préciser les vecteurs X qui réalisent ce minimum .

EXERCICE N° 4

k est un nombre réel donné et vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 1$.

Soit θ_k la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$x \longmapsto \theta_k(x) = \int_0^x \frac{du}{(1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}}$$

1°) Donner le domaine de définition et le tableau de variation de θ_k .

Pour $k \neq 1$, montrer que $T_k = \theta_k(x + \pi) - \theta_k(x)$ est indépendant de x .

2°): 2-1: On désigne par X_k la fonction réciproque de θ_k : justifier son existence .

Donner son domaine de définition et son sens de variation .

2-2: On pose $f_k(t) = \sin(X_k(t))$

$g_k(t) = \cos(X_k(t))$

$h_k(t) = (1 - k^2 f_k^2(t))^{1/2}$.

2-2-1: Exprimer f_0 , g_0 , h_0 , f_1 , g_1 , et h_1 à l'aide de fonctions usuelles .

2-2-2: Dans le cas $k \neq 1$, exprimer en fonction de T_k la période éventuelle des fonctions f_k , g_k , h_k , et en donner le tableau de variation.

Exprimer les dérivées f_k' , g_k' , h_k' au moyen de fonctions prises parmi f_k , g_k , et h_k .

FIN